

中国科学院研究生院
2012 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：高等数学（甲）

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、 选择题 (本题满分 50 分，每小题 5 分。请从题目所列的选项选择一个正确项填充空格。每题的四个备选项中只有一个是正确的，不选、错选或多选均不得分。请将你的选择标清题号写在考场发的答题纸上，直接填写在试题上无效。)

(1) 函数 $f(x) = x \cos x^2$ ，正确结论是 ()。

- (a) 在 $(-\infty, \infty)$ 内有界 (b) 当 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x)$ 为无穷大
(c) 在 $(-\infty, \infty)$ 内无界 (d) 当 $x \rightarrow \infty$ 时 $f(x)$ 极限存在

(2) 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上是连续函数，且 $0 < m < f(x) < M < \infty$ 。

则 $\frac{1}{m} \int_{-m}^m (f(t) - M) dt$ 的最大取值区间是 ()。

- (a) $(-M - m, m - M)$ (b) $(2m - 2M, 0)$ (c) $(m - M, 0)$ (d) $(0, M + m)$

(3) 微分方程 $yy'' - (y')^2 = 0$ 的一个特解是 ()。

- (a) $y = xe^x$ (b) $y = x \ln x$ (c) $y = \ln x$ (d) $y = e^x$

(4) 已知 n, m 是正整数, 且 $n < m$, 如果 $A = \int_0^1 x^m(1-x)^n dx$, $B = \int_0^1 x^n(1-x)^{m+1} dx$,

则下面结论正确的一个是 ()。

- (a) $A > B$ (b) $A = B$ (c) $A < B$ (d) A, B 的大小关系不确定

(5) 函数 $f(x) = e^x - x^2 - 4x - 3$ 在其定义域内零点的个数是 ()。

- (a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 多于 3

(6) 若函数 $f(x) = \begin{cases} e^x(\sin x + \cos x), & x \geq 0 \\ abx^2 + ax + 2a + b, & x < 0 \end{cases}$ 的导函数在 $(-\infty, \infty)$ 上连续, 则 ()。

(a) $a = 2, b = -1$ (b) $a = 2, b = -3$ (c) $a = 1, b = -3$ (d) $a = 1, b = -1$

(7) 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 $x = 4$ 处条件收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(1+2^n)a_n$ ()。

(a) 条件收敛 (b) 发散 (c) 绝对收敛 (d) 不能确定

(8) 设 S 为螺旋面 $x = u \cos v, y = u \sin v, z = v$ 的一部分, $0 \leq u \leq \sqrt{15},$

$0 \leq v \leq \pi$, 则 $\int \int_S \sqrt{x^2 + y^2} dS$ 的值为 ()。

(a) 17π (b) 19π (c) 21π (d) 23π

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$ 的值为 ()。

(a) $e^{\frac{1}{3}}$ (b) $e^{-\frac{1}{3}}$ (c) $e^{\frac{1}{2}}$ (d) $e^{-\frac{1}{2}}$

(10) 一平面过点 $M(1, 1, -1)$ 且与直线 $L: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-1}$ 垂直, 则该平面与平面 $x - 2y - z + 1 = 0$ 的交线的方向数是 ()。

(a) $(-5, 1, 3)$ (b) $(1, -3, 5)$ (c) $(1, -5, 3)$ (d) $(3, -1, 5)$

二、(本题满分 10 分) 证明极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{3n} \right)$ 存在, 并求出极限值。

三、(本题满分 10 分) 求微分方程 $y'' - 3y' + 2y = e^x(2x+1)$ 的通解。

四、(本题满分 10 分) 计算 $\int \int_D (x|y| + xy) dx dy$, 其中 D 是由抛物线 $5y = x^2 - 6$ 和抛物线 $y^2 = x$ 围成的闭区域。

五、(本题满分 10 分) 将函数 $f(x) = |x-1|$ ($0 \leq x \leq \pi$) 展开成正弦级数。

六、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x) = \int_x^1 e^{-t^2} dt$, 求 $\int_0^1 x^2 f(x) dx$ 的值。

七、(本题满分 10 分) 计算曲线积分 $\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + 2y^2}$, 其中 L 是由直线 $x + y = 1, y = x - 1$ 和半圆周 $x^2 + y^2 = 1, x \leq 0$ 所围成的闭曲线, 方向为逆时针方向。

八、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 连续, 且 $f^2(x) \leq |x|^3$, 记 $F(x) = \int_0^1 f(xt)dt$,

求 $F'(x)$, 并讨论 $F'(x)$ 的连续性。

九、(本题满分 10 分) 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, $0 < a < b$ 。

证明存在 $\zeta \in (a, b)$, 使得 $\frac{a+b}{2\zeta}f'(\zeta) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$ 。

十、(本题满分 10 分) 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上满足 $f''(x) > 0$ 。证明

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)}{n}。$$

十一、(本题满分 10 分) 设 $a < b$, 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b x^2f(x)dx = 0。$$

证明在 (a, b) 上至少存在三个不同点 x_1, x_2, x_3 , 使得 $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$ 。