
中国科学院大学
2013 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：高等数学（甲）

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。
 2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上均无效。
-

一、 **选择题**（本题满分 50 分，每小题 5 分。请从题目所列的选项选择一个正确项填充空格。每题的四个备选项中只有一个是正确的，不选、错选或多选均不得分。请将你的选择标清题号写在考场发的答题纸上，直接填写在试题上无效。）

- (1) 函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 上是连续函数， $a > 0$ ，则函数

$$F(x) = \begin{cases} a, & f(x) \geq a \\ f(x), & -a < f(x) < a \\ -a, & f(x) \leq -a \end{cases}$$

一定是 ()。

- (A) 有界可微函数 (B) 有界连续函数
(C) 连续可微函数 (D) 以上结论都不正确
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 2n + 1} + \frac{2}{n^2 + 2n + 2} + \cdots + \frac{n}{n^2 + 2n + n} \right) = ()$ 。
(A) 1 (B) ∞ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 0
- (3) 函数 $f(x) = (x + 2 \cos x)^2$ 在区间 $[0, \pi/2]$ 上的最大值是 ()。
(A) $\frac{\pi^2}{36} + \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + 1$ (B) $\frac{\pi^2}{36} + \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + 2$ (C) $\frac{\pi^2}{36} + \frac{\sqrt{3}\pi}{3} + 3$ (D) $\frac{\pi^2}{4}$
- (4) 设 $f(x) = x(x+1)\cdots(x+20)$ ，下面四个结论正确的是 ()。
(A) $f'(-1) > 0, f'(-2) > 0$ (B) $f'(-1) > 0, f'(-2) < 0$
(C) $f'(-1) < 0, f'(-2) < 0$ (D) $f'(-1) < 0, f'(-2) > 0$

(5) 已知 $g(x) \cdot \int_0^2 f(x)dx = 10$, 则 $\int_0^2 f(x)dx \cdot \int_0^2 g(x)dx =$ ()。

- (A) 20 (B) 10 (C) 5 (D) 不能确定

(6) $\lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{xy}{\sqrt[3]{x^4 + y^{12}}} =$ ()。

- (A) 0 (B) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (C) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (D) 不存在

(7) 设 $f(u)$ 在 $(-2, 2)$ 区间内可导且 $f'(u) > 0$, $f(0) = 0$, L 为单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$ 被 $y = x$ 和 y 轴正半轴所夹的弧段, 则关于弧长的曲线积分 $c_1 = \int_L f(2xy)ds$ 和 $c_2 = \int_L f(2x^2 - 1)ds$ 满足 ()。

- (A) $c_1 > 0, c_2 > 0$ (B) $c_1 > 0, c_2 < 0$
 (C) $c_1 < 0, c_2 > 0$ (D) $c_1 < 0, c_2 < 0$

(8) 设二阶线性齐次常系数微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的任一解 $y(x)$ 满足当 $x \rightarrow +\infty$ 时 $y \rightarrow 0$, 则实数 a, b 满足 ()。

- (A) $a > 0, b > 0$ (B) $a > 0, b < 0$
 (C) $a < 0, b > 0$ (D) $a < 0, b < 0$

(9) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域是 ()。

- (A) $[-2, 0)$ (B) $(-2, 0)$ (C) $(-2, 0]$ (D) $[-2, 0]$

(10) 过 $(0, 0, 1)$ 点且与直线 $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t - 4 \\ z = 2t \end{cases}$ 及 $\frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$ 都平行的平面方程为

- ()。
- (A) $5x + 2y - z + 1 = 0$ (B) $5x - y - 3z + 3 = 0$
 (C) $3x + y - z + 1 = 0$ (D) $-3x - y + z + 1 = 0$

二、(本题满分 10 分) 计算 $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x^x-1)}$ 。

三、(本题满分 10 分) 求微分方程 $y'' = y'(y-3)$ 满足初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = -\frac{5}{2}$ 的解。

四、(本题满分 10 分) 求函数 $f(x) = \pi^2 - x^2$ 在区间 $[-\pi, \pi)$ 上的傅里叶级数。

五、(本题满分 10 分) 求曲面积分 $\int \int_S xydydz + z^2dxdy$, 其中 S 为由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ($0 \leq z \leq 1$) 的上侧 (法向量与 z 轴正向夹角为锐角的一侧) 及 $z = 1$ 的下侧围成的有向曲面。

六、(本题满分 10 分) 假设函数 $f(x)$ 满足 $f(1) = 1$ 且对于 $x \geq 1$,

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)},$$

证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, 且不大于 $1 + \frac{\pi}{4}$ 。

七、(本题满分 10 分) 设两个连续函数 f, g 满足: 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) + g(x) \neq 0$ 。

证明存在唯一的数 $0 \leq a \leq 1$ 使得

$$\int_a^1 |f(x)|dx = \int_0^a g^2(x)dx。$$

八、(本题满分 10 分) 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_x^{2x} |\cos t|dt = \frac{2}{\pi}$ 。

九、(本题满分 10 分) 设 $f(x) = \frac{1}{1+x^2} - xe^x \int_0^1 f(x)dx$, 求 $f(x)$ 和 $f'(x)$ 。

十、(本题满分 10 分) 函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导。

证明存在 $\zeta, \eta \in (a, b)$, 使得 $f'(\eta) = (b^2 + ab + a^2 + 2) \frac{f'(\zeta)}{3\zeta^2 + 2}$ 。

十一、(本题满分 10 分) 函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上二阶可导, 且对任意 $x \in [0, 2]$, 有 $|f(x)| \leq 1$ 和 $|f''(x)| \leq 1$, 证明, 对任意 $x \in [0, 2]$, $|f'(x)| \leq 2$ 成立。