中国科学院大学

2013 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题

科目名称：高等代数

考生须知：

1．本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。
2．所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

1．(15 分) 求下面 $n+1$ 阶行列式的值

$$D=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n & x \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} & x^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix}$$

其中，$s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$。

2．(15 分) 假设矩阵 A 与 B 没有公共的特征根，$f(x)$ 是矩阵 A 的特征多项式，证明以下结论：

1) 矩阵 $f(B)$ 可逆；

2) 矩阵方程 $AX=XB$ 只有零解。

3. (15 分)设 $A=\left(a_{i,j}\right)_{1\le i,j\le n}$ 是斜对称方阵，即 $a_{i,j}=a_{n-j+1,n-i+1}\left(i,j=1,2,\cdots,n\right)$，证明：若 A 可逆，则其逆阵也是斜对称方阵。

4．(20 分) 设二次曲面 $x^2+ay^2+z^2+2bxy+2xz+2yz=4$ 可以经由正交变换

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

化成椭圆柱面方程 $\eta^2+4\zeta^2=4$，试求 a,b 和正交矩阵 P。

5．(15 分) 假设 3 阶实方阵 A 满足：$A^2=E$，E 是单位方阵，$A\neq\pm E$。证明 $\left(Tr(A)\right)^2=1$，其中 $Tr(A)$ 表示矩阵 A 的迹。

6．(15 分) 设 A 为 n 阶半正定实矩阵。证明：$|A+2013E|\geqslant 2013^n$，等号成立当且仅当 A=0。其中，$E$ 是单位矩阵。

7．（15 分）证明：任何一个实方阵均可表示成两个对称矩阵的乘积，其中至少有一个矩阵可逆。

8．(15 分) 设 A 是一个 3×3 正交矩阵，证明 A 可以写成 CR，其中 C 对应于 $\mathbf{R}^3$ 中的旋转变换，R 对应于 $\mathbf{R}^3$ 的恒等变换或对应于 $\mathbf{R}^3$ 中的镜面反射变换，其中 $\mathbf{R}$ 表示实数域。

9．(10 分)设 V 是数域 $\mathbf{F}$ 上的有限维向量空间，ϕ 是 V 上的线性变换。证明 V 能够分解成两个子空间的之和 $V=U\oplus W$，其中，U,W 满足：对任意 $u\in U$，存在正整数 k 使得 $\phi^k(u)=0$；对任意 $w\in W$，存在 $v_m\in V$，使得 $w=\phi^m(v_m)$ 对所有的正整数 m。

10．(15 分)设 V 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的 n 维线性空间，ϕ 是 V 上的线性变换，满足 $\phi^2=-\varepsilon$（ε 是 V 上的恒等变换）。

1) 证明 n 是偶数；

2) 若 ψ 是 V 上的线性变换，满足 $\psi\phi=\phi\psi$，证明 $\det(\psi)\geq 0$。