

中国科学院大学
2013年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：数学分析

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

1 (本题满分 25 分) 计算：

(1)(满分 10 分) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2 + n})$.

(2)(满分 15 分) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, 其中设 $a_1 = 1, a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} (n \geq 1)$.

2 (本题满分 15 分) 设 $f(x)$ 连续, $g(x) = \int_0^x f(x-t) \sin t dt$, 试证

$$g''(x) + g(x) = f(x), \quad g(0) = g'(0) = 0.$$

3 (本题满分 15 分) 求曲线 $y = e^x$ 的曲率的最大值.

4 (本题满分 30 分, 每小题 15 分) 计算积分

(1) $I = \int_{1/4}^{1/2} dy \int_{1/2}^{\sqrt{y}} e^{y/x} dx + \int_{1/2}^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} e^{y/x} dx$.

(2) $J = \iint_{\Omega} |x^2 + y^2 - 1| dx dy$, 其中 $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

5 (本题满分 15 分) 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(x+1/n)^n}$ 的收敛性和一致收敛性 (包括内闭一致收敛性).

6 (本题满分 20 分, 每小题 10 分)

(1) 证明: 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, $\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1$.

(2) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上二次可微, 且 $f''(x) < 0$, 则

$$\frac{f(a) + f(b)}{2} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

7 (本题满分 15 分) 求函数 $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x + 1$ 在集合 $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ 上的最值.

8 (本题满分 15 分) 设无穷实数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足

$$a_{n+1} = b_n - \frac{na_n}{2n+1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

试证: (1) 若 $\{b_n\}$ 有界, 则 $\{a_n\}$ 也有界; (2) 若 $\{b_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 也收敛.