

中国科学院研究生院
2012 年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：高等数学（丙）

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

一、选择题 (本题满分 40 分，每小题 5 分。请从每个题目所列的四个选项中选择一个适合放在空格中的项，并将你的选择标清题号写在考场发的答题纸上，直接填写在试题上无效。每题的四个备选项中只有一个是正确的，不选、错选或多选均不得分。)

1. 下列极限式正确的是 ()。

(A) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x})^x = 1$ (B) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \frac{1}{x})^x = 1$ (C) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = 1$ (D) $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导且导函数连续， $f(0) = 0$ ， $f'(0) = b$ 。若函数

$$F(x) = \begin{cases} \frac{f(x) + a \tan x}{x}, & x \neq 0 \\ A, & x = 0 \end{cases}$$

在 $x = 0$ 处连续，那么常数 $A =$ ()。

(A) $a + b$ (B) $a - b$ (C) $b - a$ (D) $-a - b$

3. 设函数 $f(x)$ 可导，函数 $y = f(x^2)$ 的自变量 x 在 $x = -1$ 处取增量 $\Delta x = -0.1$ 时，相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.1，则 $f'(1)$ 等于 ()。

(A) 0.5 (B) -0.5 (C) 1 (D) -1

4. 设 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内连续，且 $f(x) > 0$ ，则函数 $\varphi(x) = \frac{\int_1^x tf(t)dt}{\int_1^x f(t)dt}$ 在 $(1, +\infty)$ 内 ()。

(A) 单调递减 (B) 单调递增 (C) 先递增后递减 (D) 先递减后递增

5. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9^n} x^{2n-1}$ 的收敛半径为 ()。

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

6. 设 $f(x) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & x & -1 & 1 \\ 0 & -2 & x+1 & 1 \\ -2 & 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$, 则二阶导数 $\frac{d^2}{dx^2} f(x) = (\quad)$ 。

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

7. 设 A^* 是矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵, 若三阶矩阵 X 满足 $A^*X = A$, 则 X 的第 3 行的行向量是 ()。

- (A) (2,1,1) (B) (1,2,1) (C) $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (D) $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$

8. 设三阶矩阵 A 的秩 $r(A) = 1$, $\eta_1 = (-1, 3, 0)^T$, $\eta_2 = (2, -1, 1)^T$, $\eta_3 = (5, 0, k)^T$ 是方程组 $AX = 0$ 的三个解向量, 则常数 $k = (\quad)$ 。

- (A) -2 (B) -1 (C) 2 (D) 3

二、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)$ 的二阶导数 $f''(x)$ 存在, $y = f(xe^{-x})$, 求二阶导数 y'' 。

三、(本题满分 10 分) 设 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-a}{x+a} \right)^x = \int_a^{+\infty} xe^{-2x} dx$, 求 a 的值。

四、(本题满分 10 分) 设函数 $z = f(u)$ 由方程 $u = \varphi(u) + \int_x^y p(x+y-t)dt$ 所确定, u 是变量 x, y 的函数, 其中函数 $f(x), \varphi(u), p(x)$ 可微, 而函数 $\varphi'(u)$ 连续, 且 $\varphi'(u) \neq 1$ 。

求 $p(y) \frac{\partial z}{\partial x} + p(x) \frac{\partial z}{\partial y}$ 。

五、(本题满分 10 分) 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{1-y^2} dx dy$, 其中 D 为平面区域

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq |x|\}。$$

六、(本题满分 10 分) 将函数 $f(x) = \ln(4-3x-x^2)$ 展开成 x 的幂级数。

七、(本题满分 10 分) 求微分方程 $y'' + \frac{2}{1-y}(y')^2 = 0$ 的通解。

八、(本题满分 10 分) 设函数 $f(x), g(x)$ 满足 $f'(x) = g(x)$, $g'(x) = 2e^x - f(x)$, 且 $f(0) = 0, g(0) = 2$ 。(1) 求函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的表达式; (2) 求积分值

$$I = \int_0^\pi \left[\frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2} \right] dx。$$

九、(本题满分 10 分) 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 6 \\ -2x_1 + 4x_2 + 14x_3 - 7x_4 = 20 \\ -x_1 + 4x_2 + 17x_3 - 8x_4 = 21 \end{cases}$$

十、(本题满分 10 分) 已知 R^3 中的向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, 且向量组 $\beta_1 = \alpha_1 - k\alpha_2$, $\beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_3 + k\alpha_1$ 线性相关, 求 k 的值。

十一、(本题满分 10 分) 设 α_1, α_2 是 A 的属于不同特征值的特征向量, 求证 $\alpha_1 + \alpha_2$ 不是 A 的特征向量。

十二、(本题满分 10 分) 设 $f'(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, $f(x)$ 在 (a, b) 内二阶可导, $f(a) = f(b) = 0$, $\int_a^b f(x) dx = 0$, 求证: (1) 在 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使得 $f'(\xi) = f(\xi)$; (2) 在 (a, b) 内至少一点 η , $\eta \neq \xi$, 使得 $f''(\eta) = f(\eta)$ 。