中国科学院研究生院
2012年招收攻读硕士学位研究生入学统一考试试题
科目名称：数学分析

考生须知:

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。
2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。

---

1 (本题满分 30 分，每小题 15 分) 计算极限：

$$(\mathbf{1})\ \lim_{n\to\infty} n^3\left(2\sin\frac{1}{n}-\sin\frac{2}{n}\right). \qquad (\mathbf{2})\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{\cos\frac{1}{x^2}}\right)^{x^4}.$$

2 (本题满分 30 分，每小题 15 分) 计算积分：

$$(\mathbf{1})\ I=\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\mathrm{tg}^3 x}. \qquad (\mathbf{2})\ J=\iint\limits_S x\big(1+yf(x^2+y^2)\big)dxdy,$$

其中 S 为由曲线 $y=x^3, y=1, x=-1$ 所围成的区域， $f(x)$ 为实值连续函数.

3 (本题满分 15 分) 求下列幂级数的收敛域：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}.$$

4 (本题满分 15 分) 证明：函数列 $s_n(x)=\dfrac{x}{1+n^2x^2}(n\ge 1)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛；函数列 $t_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}(n\ge 1)$ 在区间 $(0,1)$ 上不一致收敛.

5 (本题满分 15 分) 设在区间 $[a,b]$ 上, $f(x)$ 连续, $g(x)$ 可积, 并且 $f(x)>0, g(x)>0$. 证明

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n(x)g(x)dx\right)^{1/n}=\max_{a\le x\le b} f(x).$$

6 (本题满分 15 分) 设在区间 $[0,a]$ 上， $f(x)$ 二次可导, 并且 $|f(x)|\le 1, |f''(x)|\le 1$, 则当 $x\in[0,a]$ 时， $|f'(x)|\le \dfrac{2}{a}+\dfrac{a}{2}$.

7 (本题满分 15 分) 设 n 是一个正整数. 证明：方程 $x^n+nx-1=0$ 有唯一的正实根 x_n, 并且当 $\alpha>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$ 收敛.

8 (本题满分 15 分) 设 $\rho(x,y,z)$ 是原点 O 到椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分(即满足 $z\ge 0$ 的部分)Σ 的任一点 (x,y,z) 处的切面的距离，求积分

$$\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}dS.$$
