
中国科学院大学

2013 年招收攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目名称：概率论与数理统计

考生须知：

1. 本试卷满分为 150 分，全部考试时间总计 180 分钟。
 2. 所有答案必须写在答题纸上，写在试题纸上或草稿纸上一律无效。
-

一、(10 分) 假定通过验血可以诊断某种疾病，验血结果只有两种：阴性或阳性。已知当结果显示为阳性时，的确患有该种疾病的概率为 0.95，而显示为阴性时，患有该种疾病的概率为 0.02。有一个病人到某诊所看病，他告诉医生他感觉不舒服，医生为他做了检查并验了血，在看到验血结果之前，医生认为他患病的可能性为 0.3，问在看到验血结果为阳性时该医生应如何修改他先前的判断？

二、(10 分) 有 5 个家庭，每家有 6 个孩子，问至少有 3 家育有 4 个或更多个女孩子的概率是多少？（假定每家的任一个孩子的性别与其他孩子的性别相互独立而且是女孩的概率为 $\frac{1}{2}$ ）

三、(共 30 分，每小题 15 分) 设一家超市买入数量为 B 的某种商品，这种商品的需求量是随机的，用 Y 表示 (Y 取非负整数值)。又假设每卖出一件这种商品，超市盈利 s 元，而贮存一件所需费用为 t 元。

(a) 试证：当 Y 取值为 y 时，超市在这种商品上的损失函数为：

$$L(y, B) = \begin{cases} -sy + t(B - y), & y \leq B \\ -sB, & y > B \end{cases}$$

(b) 假设 Y 的分布为 $P(Y = y) = p_y$ (已知)，试求使超市获得平均最大盈利的 B 值。

四、(共 30 分，每小题 10 分) 设 R 的分布密度为

$$f(r) = \begin{cases} 2r, & 0 < r < 1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

- (a) 试求概率 $P(a \leq R \leq b)$, $0 < a < b < 1$;
- (b) 试求 R 的期望和方差;
- (c) 现有 100 个相互独立且与 R 同分布的随机变量: R_1, R_2, \dots, R_{100} 。试用正态分布表示如下概率:

$$P\left(\frac{R_1+R_2+\cdots+R_{100}}{100} > \frac{1}{3}\right).$$

五、(10分) 设有一个均匀的骰子和若干均匀硬币。掷一次骰子，然后按照投掷的点数再抛掷相同数目的硬币，以 Y 记这些硬币中出现正面的个数。试求 Y 的概率分布。

六、(共20分，每小题10分) 设 X 与 Y 有如下联合密度函数：

$$f(x,y) = \begin{cases} 2x + 2y - 4xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(a) 试求 X 与 Y 的边际分布密度；

(b) 试求给定 $X = \frac{1}{4}$ 时 Y 的条件密度 $f_Y(y|X = \frac{1}{4})$ 。

七、(20分) 考虑一个容量为 n 的样本： X_1, X_2, \dots, X_n ，它们共同的分布为

$$f(x; \lambda, \theta) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-\theta)}, & x \geq \theta, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

试求 λ 及 θ 的极大似然估计(其中 $\lambda \geq 0$)。

八、(共20分，每小题10分) 某学院一年级学生共100人，期中考试的平均成绩为 μ_0 。期末考试后，教员在统计成绩之前预测学生的平均成绩有所提高。

(a) 设计一个检验，以便考查期末考试的平均成绩是否高于 μ_0 (检验水平为5%)；

(b) 试求期末考试平均成绩的置信区间(置信水平为95%)。